المحاضرة السابعة / /

خوارزمية ديكسترا:
تستخدم خوارزمية من أجل الحصول على المسافة (أو أقصر مسافة) بين رأس معطى وليكن v_0 وبقية رؤوس البيان

البيان الموزون:
ليكن لدينا البيان التالي:

G_1

G_2

G_3

البيان الموزون هو بيان يرفق مع أضلاعه أو رؤوسه أو كليهما معاً بدالة (قيمة) حقيقية تعبر عن وزن الضلع أو الرأس، عندئذ نقول عن هذا البيان أنه بيان موزون أي يرافق كل ضلع أو رأس قيمة.

لنعود الآن للخوارزمية:
ليكن لدينا $G(V, E)$ بيان موزون ومترابط، ولتكن مجموعة الرؤوس $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_p\}$ ومجموعة الأضلاع $E(G) = \{e_1, e_2, \dots, e_q\}$
وليكن v_0 رأس معطى:
المخرجات: المسافة بين رأس معطى v_0 وبقية رؤوس البيان

الخطوات:
1) لتكن $i = 0$ ، $S_0 = \{v_0\}$ وليكن $L(v_0) = 0$
عداد — مجموعة رؤوس البيان — المسافة بين الرأس ونفسه
$L(v) = \infty$ المسافة بين الرأس وباقي الرؤوس

Alamal

/ /

إذا كان $i=p$ توقف وإلا اذهب إلى الخطوة رقم 2 .

2- لأجل كل رأس $v \in S'_i = N(S_i)$

تمثل الرؤوس التي تمثل الرؤوس المجاورة للرؤوس S_i

نضع :

$$L(v) = \min\{L(v), L(v_i) + w(v_i v)\}$$

حيث المسافة للرأس v عن بقية الرؤوس

3- أوجد $\min\{L(v)\}$.

هذا يعني بعد حساب المسافات للرؤوس عن v_0 نوجد أصغر مسافة بين هذه الرؤوس ولتكن v_{i+1} رأساً له أقصر مسافة تبعد عن v_0 .

4- نضع :

$$S_{i+1} = S_i \cup \{v_{i+1}\}$$

المسافة التي تحتوي الرأس السابق

5- نختار $i=i+1$ إذا كان $i = p-1$ توقف

وإلا انتقل إلى الخطوة الثانية .

مثال: ليكن لدينا البيان التالي وهو بيان بسيط :

v_2 — v_1 : 10
v_2 — v_3 : 8
v_2 — v_5 : 4
v_1 — v_0 : 12
v_1 — v_6 : 7
v_5 — v_0 : 20
v_3 — v_4 : 13
v_5 — v_4 : 4
v_6 — v_0 : 9
v_4 — v_6

والمطلوب هو حساب المسافات التي تبعد بها رأس v_0 عن بقية الرؤوس $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6$ حسب خوارزمية ديكسترا :

الحل :

1- $i=0$, $S_0=\{v_0\}$, $L(v_0)=0$, $L(v)=\infty$, $v \neq v_0$

2) نحسب مجموعة الرؤوس المجاورة لـ v_0 وهي : v_1 , v_5 , v_6

$$S_0' = \{v_1 , v_5 , v_6\}$$

نحسب المسافات التي تبعد رؤوس S_0' عن الرأس المعطى v_0.
(أقصر مسار)

$L(v_1) = 12$, $L(v_5) = 20$, $L(v_6) = 9$

المسافة بين v_1 و v_0 بأقصر مسار

3) نختار أقصر مسافة لرؤوس S_0' من v_0 وهي مسافة الرأس v_6

4)
$$S_1 = S_0 \cup \{v_6\}$$
$$= \{v_0\} \cup \{v_6\} = \{v_0 , v_6\}$$

نرسم :

(v_0 — v_6 بطول 9) S_1

5) نزيد العداد مقدار 1 : $i = 0+1 = 1$, $i = 1 < p-1 = 7-1 = 6$
إذاً وبذلك ننتقل للخطوة الثانية :

2- إذاً نأخذ الرؤوس المجاورة لرؤوس S_1

$$S_1' = \{v_1 , v_5 , v_4\}$$

نحسب المسافات لرؤوس S_1' من الرأس v_0.

$d(v_0 , v_1)$

$L(v_1) = 12$, $L(v_5) = 20$, $L(v_4) = 15$ → (بالرأس v_6)

3- نختار أقصر مسافة للرؤوس S_1' من الرأس v_0 وهو الرأس v_1

4- $S_2 = S_1 \cup \{v_1\} = \{v_0 , v_6 , v_1\}$

نرسم :

(v_0 — v_1 بطول 12 ، v_0 — v_6 بطول 9) S_2

Alamal

/ /

5. $i = i+1 = 2$ ، $i = 2 < p-1 = 6$ ننتقل إلى الخطوة الثانية

2. نختار مجموعة الرؤوس المجاورة لـ S_2 وهي $S'_2 = \{v_2, v_4, v_5\}$

$\partial(v_0, v_2)$

نحسب المسافات:

$L(v_2) = 22, \quad L(v_5) = 20, \quad L(v_4) = 15$

3. نختار أقصر مسافة وهي مسافة الرأس v_4.

4. $S_3 = S_2 \cup \{v_4\} = \{v_0, v_1, v_6, v_4\}$

نرسمه:

S_3: v_1 —12— v_0 —9— v_6 —15— v_4

5. $i = i+1 = 3$ ، $i = 3 < p-1 = 6$ ننتقل للخطوة الثانية.

2. نختار مجموعة الرؤوس المجاورة لـ S_3 وهي:

$S'_3 = \{v_2, v_5, v_3\}$

نحسب المسافات:

$L(v_2) = 22$, $L(v_5) = 19$ (عبر v_6, v_4) , $L(v_3) = 28$ (عبر v_6, v_4)

3. نختار أقصر مسافة وهي مسافة الرأس v_5.

4. $S_4 = S_3 \cup \{v_5\} = \{v_0, v_1, v_6, v_5, v_4\}$

نرسمه:

S_4: v_1 —12— v_0 —9— v_6 —15— v_4 —(19)— v_5

/ /

5- $i = 3+1 = 4$ ، $i = 4 < p-1 = 6$ ننتقل للخطوة الثانية.

2-

$$S'_4 = \{V_2, V_3\}$$

نحسب المسافات:

$L(V_2) = 22, \quad L(V_3) = 28$

3- نختار أقصر مسافة وهي V_2.

4-

$$S_5 = S_4 \cup \{V_2\} = \{V_0, V_1, V_6, V_4, V_5, V_2\}$$

نرسمه:

$V_2 (22)$ — V_1 (12) — V_0 ; V_5 (19) ; V_0 (9) — V_6 ; V_4 (13) — V_6

S_5

5- $i = i+1 = 4+1 = 5$ ، $5 < 6$ ننتقل للخطوة 2.

2-

$$S'_5 = \{V_3\}$$

نحسب المسافات: $L(V_3) = 28$

3- نختار أقصر مسافة وهي V_3

4- $S_6 = S_5 \cup \{V_3\} = \{V_0, V_1, V_2, V_3, V_4, V_5, V_6\}$

نرسمه:

$V_2 (22)$ — V_1 (12) — V_0 ; V_3 (28) — V_4 ; V_5 (19) ; V_0 (9) — V_6 ; V_4 (13) — V_6

S_6

5- $i = i+1 = 5+1 = 6$ ، $6 = p-1 = 6$ نتوقف

المسافات التي تبعد v_0 عن بقية رؤوس البيان المعطى بالشكل:

$d(v_0, v_0) = L(v_0) = 0$

$d(v_0, v_1) = L(v_1) = 12$

$d(v_0, v_2) = L(v_2) = 22$

$d(v_0, v_3) = L(v_3) = 28$

$d(v_0, v_4) = L(v_4) = 15$

$d(v_0, v_5) = L(v_5) = 10$

$d(v_0, v_6) = L(v_6) = 9$

ملاحظة عن هذا التمرين:

الأوزان أعطيت في هذا التمرين للأضلاع وليس للرؤوس ولكن يمكننا في الحالة العامة إعطاء الأوزان إما للأضلاع أو للرؤوس أو لكليهما معاً.

والأوزان لا تدل على طول الضلع وإنما هي قيمة أعطيت فقط.